第 57 卷 第 3 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 57 No. 3
2018 年 5 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI May 2018

DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2018.03.020

Caputo 导数下分数阶 Lagrange 系统的 Noether 准对称性与守恒量*

刘艳东[1]，张毅[2]

（1. 苏州科技大学数理学院，江苏 苏州 215009；
2. 苏州科技大学土木工程学院，江苏 苏州 215011）

摘　要：利用时间重新参数化方法，研究分数阶 Lagrange 系统的 Noether 准对称性与守恒量。首先，导出 Caputo 导数下的分数阶 Lagrange 方程。其次，给出分数阶 Lagrange 系统的分数阶守恒量的定义，在时间不变的特殊无限小变换群下给出分数阶 Lagrange 系统的 Noether 准对称性的定义和判据，并建立 Noether 准对称性定理。然后，利用时间重新参数化方法，给出在时间变化的一般无限小变换群下分数阶 Lagrange 系统的 Noether 准对称性的定义和判据，建立 Noether 准对称性定理。最后，举例说明结果的应用。

关键词：时间重新参数化；Caputo 导数；Lagrange 系统；Noether 准对称性；守恒量

中图分类号：O316　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2018）03－0149－06

Noether quasi-symmetry and conserved quantity for fractional Lagrange system in terms of Caputo derivatives

LIU Yandong[1], *ZHANG Yi*[2]

(1. College of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China;
2. College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215011, China)

Abstract: The Noether quasi-symmetry and the conserved quantity for a fractional Lagrange system are studied by using the time-reparameterization method. Firstly, the fractional Lagrange equations in terms of Caputo derivatives are derived; Secondly, the definition of fractional conserved quantity for the fractional Lagrange system is given, and based on the special infinitesimal transformations of group without transforming time, the definition and the criterion of the Noether quasi-symmetry for the fractional Lagrange system are given, and Noether's quasi-symmetry theorem is established; Finally, the definition and the criterion of Noether quasi-symmetry for the fractional Lagrange system under the general infinitesimal transformations of group with transforming time are given, Noether's quasi-symmetry theorem is derived by using the time-reparameterization method. An example is given to illustrate the application of the results.

Key words: time-reparameterization; Caputo derivative; Lagrange system; Noether quasi-symmetry; conserved quantity

* **收稿日期**：2017－05－02
基金项目：国家自然科学基金（11572212，11272227）；苏州科技大学研究生科研创新计划（SKYCX16_004）
作者简介：刘艳东（1988 年生），男；**研究方向**：力学中的数学方法；E-mail：996364538@qq.com
通信作者：张毅（1964 年生），男；**研究方向**：分析力学；E-mail：zhy@mail.usts.edu.cn

经典力学中许多经典的方法只适用于保守系统，对于非保守系统却不适用。为了解决这一问题，1996 年 Riewe[1-2]将分数阶微积分引入到非保守系统动力学，开启了非保守系统的分数阶建模及其研究。Frederico 和 Torres[3-6]首先开展分数阶 Noether 定理的研究，利用时间重新参数化方法证明了分数阶力学和控制系统的 Noether 定理。张毅等[7-13]研究了分数阶 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量。近年来，关于对称性与守恒量的研究取得了许多成果[14-19]。但迄今为止，基于 Frederico 和 Torres 定义的分数阶守恒量概念建立的 Noether 定理仅研究了 Noether 对称性与守恒量之间的联系，尚未考虑其准对称性。本文将基于 Caputo 导数用时间重新参数化方法研究分数阶 Lagrange 系统的 Noether 准对称性，建立该系统准对称性的定义和判据，给出 Frederico-Torres 守恒量定义下的分数阶守恒量，并证明该系统的分数阶 Noether 准对称性定理。

1 分数阶导数及其性质

以下简单介绍文中将用到的分数阶导数的定义及相关性质，具体参见［20-21］。

设函数 $f(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续可积，则 Riemann-Liouville 分数阶左导数和右导数分别定义为：

$$ {}_aD_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t(t-\tau)^{-\alpha}f(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (1)$$

$$ {}_tD_b^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\int_t^b(\tau-t)^{-\alpha}f(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (2)$$

Caputo 分数阶左导数和右导数分别定义为：

$$ {}_a^CD_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (3)$$

$$ {}_t^CD_b^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^b(\tau-t)^{-\alpha}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right)f(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (4)$$

其中，$\Gamma(*)$ 是 Euler Gamma 函数，α 是阶数，且 $0\leqslant\alpha<1$。

设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是在区间 $[a,b]$ 上的光滑函数，且 $f(a)=f(b)=0$，则 Caputo 导数下的分数阶分部积分公式为：

$$\int_a^b g(t)\,{}_a^CD_t^{\alpha}f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,{}_tD_b^{\alpha}g(t)\mathrm{d}t \quad (5)$$

和

$$\int_a^b g(t)\,{}_t^CD_b^{\alpha}f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,{}_aD_t^{\alpha}g(t)\mathrm{d}t \quad (6)$$

设 $0<\alpha<1$ 和 $0<\beta<1$，且 $f'(a)=0$，则有：

$$ {}_a^CD_t^{\alpha}\,{}_a^CD_t^{\beta}f(t) = {}_a^CD_t^{\beta}\,{}_a^CD_t^{\alpha}f(t) = {}_a^CD_t^{\alpha+\beta}f(t) \quad (7)$$

定义算子：

$$ {}^C\mathcal{D}_t^{\gamma}(f,g) = -g\,{}_tD_b^{\gamma}f + f\,{}_a^CD_t^{\gamma}g \quad (8)$$

或

$$ {}^C\mathcal{D}_t^{\gamma}(f,g) = g\,{}_aD_t^{\gamma}f - f\,{}_t^CD_b^{\gamma}g \quad (9)$$

当 $\gamma=1$ 时，公式（8）和（9）成为：

$$ {}^C\mathcal{D}_t^{1}(f,g) = -g\,{}_tD_b^{1}f + f\,{}_a^CD_t^{1}g = g\dot{f}+f\dot{g} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(fg) \quad (10)$$

$$ {}^C\mathcal{D}_t^{1}(f,g) = g\,{}_aD_t^{1}f - f\,{}_t^CD_b^{1}g = g\dot{f}+f\dot{g} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(fg) \quad (11)$$

这里 ${}^C\mathcal{D}_t^{1}(f,g) = {}^C\mathcal{D}_t^{1}(g,f)$，但一般地有 ${}^C\mathcal{D}_t^{\gamma}(f,g) \neq {}^C\mathcal{D}_t^{\gamma}(g,f)$。

2 Caupto 导数下分数阶 Lagrange 方程

设 Hamilton 作用量为：

$$S[q_s(\cdot)] = \int_{t_1}^{t_2} L(t,q_s(t),{}_{t_1}^CD_t^{\alpha}q_s(t))\mathrm{d}t \quad (12)$$

其中 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 为广义坐标，$L(t,q_s(t),{}_{t_1}^CD_t^{\alpha}q_s(t))$ 为系统的 Lagrange 函数。

分数阶 Hamilton 原理可表示为：

$$\delta S = 0 \quad (13)$$

带有交换关系：

$$ {}_{t_1}^CD_t^{\alpha}\delta q_s(t) = \delta\,{}_{t_1}^CD_t^{\alpha}q_s(t),\quad {}_t^CD_{t_2}^{\alpha}\delta q_s(t) = \delta\,{}_t^CD_{t_2}^{\alpha}q_s(t) \quad (14)$$

和端点条件：

$$\delta q_s(t)\big|_{t=t_1} = \delta q_s(t)\big|_{t=t_2} = 0 \quad (15)$$

由分数阶 Hamilton 原理可直接导出：

$$\partial_2 L(t,q_s(t),{}_{t_1}^CD_t^{\alpha}q_s(t)) + {}_tD_{t_2}^{\alpha}\partial_3 L(t,q_s(t),{}_{t_1}^CD_t^{\alpha}q_s(t)) = 0 \quad (16)$$

方程（16）就是 Caputo 导数下的分数阶 Lagrange 方程。由分数阶 Lagrange 方程描述的动力学系统可称为分数阶 Lagrange 系统。

3 特殊无限小变换下系统的 Noether 准对称性与守恒量

下面研究在时间不变的特殊无限小变换下分数阶 Lagrange 系统（16）的 Noether 准对称性与守恒量问题。首先由分数阶守恒量的 Frederico-Torres 定义[3]，我们有：

定义 1 对于分数阶 Lagrange 系统，当且仅当沿着方程（16）的所有解曲线，有：

$$I(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t)) = \sum_{i=1}^{m} I_i^1(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t)) \cdot I_i^2(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t)) \tag{17}$$

其中，m 是任意整数，对于每一组函数 I_i^1 和 $I_i^2(i = 1,2,\cdots,m)$，满足

$$ {}^{C}D_t^{\alpha}(I_i^{j_i^1}(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t)), I_i^{j_i^2}(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t))) = 0 \tag{18}$$

这里 $j_i^1 = 1$ 且 $j_i^2 = 2$，或 $j_i^1 = 2$ 且 $j_i^2 = 1$，则 $I(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t))$ 是该系统的分数阶守恒量。

定义 2　设 L_1 是另外的一个 Lagrange 函数，则时间不变的特殊无限小变换

$$\bar{q}_s(t) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,q_s(t)) + o(\varepsilon) \tag{19}$$

是分数阶 Lagrange 系统（16）的 Noether 准对称变换，当且仅当对任意 $[T_1,T_2] \subseteq [t_1,t_2]$，有

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t))\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L_1(t,\bar{q}_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\bar{q}_s(t))\mathrm{d}t \tag{20}$$

成立。

由式（20），容易得到：

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t))\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L(t,\bar{q}_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\bar{q}_s(t)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta G(t,\bar{q}_s(t))\mathrm{d}t \tag{21}$$

这里 $\Delta G = \varepsilon G(t,q_s(t))$。

判据 1　如果规范函数 $G(t,q_s(t))$ 和无限小生成元 ξ_s 满足条件：

$$\partial_2 L \cdot \xi_s + \partial_3 L \cdot {}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\xi_s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G = 0 \tag{22}$$

则变换（19）是分数阶 Lagrange 系统（16）的 Noether 准对称变换。

证明　考虑到式（21）对任意的积分区间 $[T_1,T_2]$ 都成立，因此有：

$$L(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t)) = L(t,\bar{q}_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\bar{q}_s(t)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta G(t,\bar{q}_s(t)) \tag{23}$$

将式（23）对 ε 求导，并令 $\varepsilon = 0$，可得：

$$0 = \partial_2 L \cdot \xi_s + \partial_3 L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[q_s(\tau) + \varepsilon\xi_s(\tau,q_s(\tau))]\mathrm{d}\tau\right\}\Bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G = \partial_2 L \cdot \xi_s + \partial_3 L \cdot {}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\xi_s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G \tag{24}$$

定理 1　对于分数阶 Lagrange 系统（16），如果无限小变换（19）是其 Noether 准对称变换，则系统存在定义 1 意义下的分数阶守恒量，形如：

$$I = \partial_3 L \cdot \xi_s + {}_{t_1}D_t^{1-\alpha}G \tag{25}$$

证明　由方程（16）可得：

$$\partial_2 L = -{}_tD_{t_2}^{\alpha}\partial_3 L \tag{26}$$

将方程（26）代入式（22），注意到式（8）和（9），我们有：

$$0 = -{}_tD_{t_2}^{\alpha}\partial_3 L \cdot \xi_s + \partial_3 L \cdot {}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\xi_s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G = {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}(\partial_3 L,\xi_s) + {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}({}_{t_1}D_t^{1-\alpha}G,1)$$

由定义 1，即得结果。证毕。

定理 1 称为在时间不变的特殊无限小变换下分数阶 Lagrange 系统（16）的 Noether 准对称性定理。

4　一般无限小变换下系统的 Noether 准对称性与守恒量

下面研究在时间变化的一般无限小变换下分数阶 Lagrange 系统（16）的 Noether 准对称性与守恒量问题。

定义 3　设 L_1 是另外一个 Lagrange 函数，则时间变化的一般无限小变换

$$\bar{t} = t + \varepsilon\xi_0(t,q_s(t)) + o(\varepsilon)$$
$$\bar{q}_s(t) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,q_s(t)) + o(\varepsilon) \tag{27}$$

是分数阶 Lagrange 系统（16）的 Noether 准对称变换，当且仅当对任意 $[T_1,T_2] \subseteq [t_1,t_2]$，有

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t))\mathrm{d}t = \int_{\bar{T}_1}^{\bar{T}_2} L_1(\bar{t},\bar{q}_s(\bar{t}),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\bar{q}_s(\bar{t}))\mathrm{d}\bar{t} \tag{28}$$

成立。

由式（28），我们有：

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t))\mathrm{d}t = \int_{\bar{T}_1}^{\bar{T}_2}\left[L(\bar{t},\bar{q}_s(\bar{t}),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\bar{q}_s(\bar{t})) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{t}}\Delta G(\bar{t},\bar{q}_s(\bar{t}))\right]\mathrm{d}\bar{t} \tag{29}$$

判据 2　如果规范函数 $G(t,q_s(t))$ 和无限小生成元 ξ_0 和 ξ_s 满足条件：

$$(\partial_1 L + \partial_3 L \cdot {}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\dot{q}_s(t))\xi_0 + \partial_2 L \cdot \xi_s + \partial_3 L \cdot {}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + L\dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G = 0 \tag{30}$$

则变换（27）是分数阶 Lagrange 系统（16）的

Noether 准对称变换。

证明 由式（29），可得：

$$\int_{T_1}^{T_2} L(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t))\mathrm{d}t =$$

$$\int_{T_1}^{T_2}\Big[L(\bar{t},\bar{q}_s(\bar{t}),{}_{t_1}^{C}D_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{q}_s(\bar{t}))\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta G(\bar{t},\bar{q}_s(\bar{t}))\Big]\mathrm{d}t \tag{31}$$

考虑到式（31）对任意的积分区间 $[T_1,T_2]$ 都成立，因此有：

$$L(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t)) = L(\bar{t},\bar{q}_s(\bar{t}),{}_{t_1}^{C}D_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{q}_s(\bar{t}))\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta G(\bar{t},\bar{q}_s(\bar{t})) \tag{32}$$

并注意到：

$$\begin{aligned}
{}_{t_1}^{C}D_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{q}_s(\bar{t}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{\bar{t}}(\bar{t}-\bar{\tau})^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{\tau}}\bar{q}_s(\bar{\tau})\mathrm{d}\bar{\tau} = \\
&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t+\Delta t-\tau-\Delta\tau)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau+\mathrm{d}\Delta\tau}\cdot \\
&(q_s(\tau)+\Delta q_s(\tau))(1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta\tau)\mathrm{d}\tau = \\
&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{-\alpha}\cdot \\
&\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}q_s(\tau)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta q_s(\tau)-\alpha\frac{\Delta t-\Delta\tau}{t-\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}q_s(\tau)\Big)\mathrm{d}\tau = \\
&{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t)+{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\Delta q_s(t) - \\
&\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{-\alpha}\frac{\Delta t-\Delta\tau}{t-\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}q_s(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

其中，$\Delta t=\varepsilon\xi_0$，$\Delta q_s(t)=\varepsilon\xi_s$。由于：

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{-\alpha}\frac{\Delta t-\Delta\tau}{t-\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}q_s(\tau)\mathrm{d}\tau = \\
&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t}(\Delta t-\Delta\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}q_s(\tau)\mathrm{d}(t-\tau)^{-\alpha} = \\
&\Big[\frac{\dot{q}_s(\tau)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha}(\Delta t-\Delta\tau)\Big]\Big|_{t_1}^{t} - \\
&\frac{\Delta t}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\dot{q}_s(\tau)\mathrm{d}\tau + \\
&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\dot{q}_s(\tau)\Delta\tau)\mathrm{d}\tau = \\
&-\Delta t\,{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\dot{q}_s(t)+{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}(\dot{q}_s(t)\Delta t)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
{}_{t_1}^{C}D_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{q}_s(\bar{t}) &= {}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t)+{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\Delta q_s(t) + \\
&\Delta t\,{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\dot{q}_s(t) - {}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}(\dot{q}_s(t)\Delta t) = \\
&{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t)+\varepsilon[{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\xi_s+\xi_0\,{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\dot{q}_s(t)-{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}(\dot{q}_s(t)\xi_0)]
\end{aligned} \tag{33}$$

将式（33）代入方程（32），同时等号两边对 ε 求导，并令 $\varepsilon=0$，可得：

$$\begin{aligned}
0 &= (\partial_1 L+\partial_3 L\cdot{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\dot{q}_s(t))\xi_0 + \\
&\partial_2 L\cdot\xi_s+\partial_3 L\cdot{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+L\dot{\xi}_0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G
\end{aligned}$$

定理 2 对于分数阶 Lagrange 系统（16），如果无限小变换（27）是其 Noether 准对称变换，则系统存在定义 1 意义下的分数阶守恒量，形如：

$$\begin{aligned}
I &= \partial_3 L\cdot\xi_s + \\
&(L-\alpha\cdot\partial_3 L\cdot{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t))\xi_0+{}_{t_1}D_t^{1-\alpha}G
\end{aligned} \tag{34}$$

证明 引进李普希茨变换

$$[t_1,t_2]\ni t\longmapsto\sigma f(\lambda)\in[\sigma_1,\sigma_2] \tag{35}$$

当 $\lambda=0$ 时，满足 $t'_\sigma=\dfrac{\mathrm{d}t(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=f(\lambda)=1$。则 Hamilton 作用量（12）可表示为：

$$\begin{aligned}
S[q_s(\cdot)] &= \int_{t_1}^{t_2}L(t,q_s(t),{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t))\mathrm{d}t = \\
&\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}L(t(\sigma),q_s(t(\sigma)),{}_{\sigma_1}^{C}D_{t(\sigma)}^{\alpha}q_s(t(\sigma)))t'_\sigma\mathrm{d}\sigma
\end{aligned} \tag{36}$$

其中，$t(\sigma_1)=t_1$，$t(\sigma_2)=t_2$，以及

$$\begin{aligned}
&{}_{\sigma_1}^{C}D_{t(\sigma)}^{\alpha}q_s(t(\sigma)) = \\
&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\frac{t_1}{f(\lambda)}}^{\sigma f(\lambda)}(\sigma f(\lambda)-\tau)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}q_s(\tau f^{-1}(\lambda))\mathrm{d}\tau = \\
&\frac{(t'_\sigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\frac{t_1}{(t_\sigma)^2}}^{\sigma}(\sigma-s)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}q_s(s)\mathrm{d}s = \\
&(t'_\sigma)^{-\alpha}{}_{\frac{t_1}{(t'_\sigma)^2}}^{\;C}D_\sigma^{\alpha}q_s(\sigma)
\end{aligned} \tag{37}$$

将式（37）代入式（36）得：

$$\begin{aligned}
&S[q_s(\cdot)] = \\
&\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}L(t(\sigma),q_s(t(\sigma)),(t'_\sigma)^{-\alpha}{}_{\frac{t_1}{(t'_\sigma)^2}}^{\;C}D_\sigma^{\alpha}q_s(\sigma))t'_\sigma\mathrm{d}\sigma \\
&\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bar{L}(t(\sigma),q_s(t(\sigma)),t'_\sigma,{}_{\frac{t_1}{(t'_\sigma)^2}}^{\;C}D_\sigma^{\alpha}q_s(\sigma))\mathrm{d}\sigma = \\
&\bar{S}[t(\cdot),q_s(t(\cdot))]
\end{aligned} \tag{38}$$

因此，如果作用量 $S[q_s(\cdot)]$ 在定义 3 意义下准不变，则作用量 $\bar{S}[t(\cdot),q(t(\cdot))]$ 在定义 2 意义下准不变。由定理 1，表达式

$$I=\partial_3\bar{L}\xi_0+\partial_4\bar{L}\xi_s+{}_{t_1}D_t^{1-\alpha}G \tag{39}$$

是系统的一个分数阶守恒量。当 $\lambda=0$ 时，我们得到：

$${}_{t_1/(t'_\sigma)^2}^{\;C}D_\sigma^{\alpha}q_s(\sigma)={}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}q_s(t) \tag{40}$$

于是有

$$\partial_4\bar{L}=\partial_3 L \tag{41}$$

而

$$\begin{aligned}
&\partial_3\bar{L}=\partial_4\bar{L}\cdot \\
&\frac{\partial}{\partial t'_\sigma}\Big[\frac{(t'_\sigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\frac{T_1}{(t'_\sigma)^2}}^{\sigma}(\sigma-s)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}q_s(s)\mathrm{d}s\Big]t'_\sigma+L=
\end{aligned}$$

$$\partial_4 \bar{L} \cdot \frac{-\alpha(t'_\sigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{T_1}{(t'_\sigma)^2}}^{\sigma} (\sigma - s)^{-\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} q_s(s) \mathrm{d}s + L = - \alpha \partial_3 L \cdot {}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q_s(t) + L \tag{42}$$

将式（41）和（42）代入式（39），得到：

$$I = (-\alpha\partial_3 L \cdot {}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q_s(t) + L)\xi_0 + \partial_3 L \xi_s + {}_{t_1}D_t^{1-\alpha} G = \partial_3 L \cdot \xi_s + (L - \alpha \cdot \partial_3 L \cdot {}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q_s(t))\xi_0 + {}_{t_1}D_t^{1-\alpha} G$$

定理 2 称为在时间变化的一般无限小变换下分数阶 Lagrange 系统（16）的 Noether 准对称性定理。

5　算　例

设力学系统的分数阶 Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}({}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q(t))^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2(t) \tag{43}$$

其中，ω 为常数。

方程（16）给出：

$$-{}_{t}D_{t_2}^{\alpha}\,{}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q(t) + \omega^2 q(t) = 0 \tag{44}$$

由条件（30），我们得到：

$$ {}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q(t) \cdot {}_{t_1}^{C}D_t^\alpha \dot{q}(t) \cdot \xi_0 - \omega^2 q(t) \cdot \xi_1 + {}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q(t) \cdot {}_{t_1}^{C}D_t^\alpha \xi_1 - {}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q(t) \cdot {}_{t_1}^{C}D_t^\alpha (\dot{q}(t)\xi_0) + L\, \dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G = 0 \tag{45}$$

方程（45）有解：

$$\xi_0^1 = 1, \xi_1^1 = 0, G^1 = 0 \tag{46}$$

$$\xi_0^2 = 0, \xi_1^2 = \dot{q}(t),$$

$$G^2 = \frac{1}{2}(\omega^2 q^2(t) - ({}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q(t))^2) \tag{47}$$

生成元（46）相应于系统的 Noether 对称变换，生成元（47）相应于系统的 Noether 准对称变换。根据定理 2，系统存在如下分数阶守恒量：

$$I^1 = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)({}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q(t))^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2(t) \tag{48}$$

$$I^2 = {}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q(t) \cdot \dot{q}(t) + \frac{1}{2}\, {}_{t_1}D_t^{1-\alpha}[\omega^2 q^2(t) - ({}_{t_1}^{C}D_t^\alpha q(t))^2] \tag{49}$$

如取 $\alpha = 1$，则式（48）和（49）成为：

$$I_N^1 = -\frac{1}{2}\dot{q}^2(t) - \frac{\omega^2}{2} q^2(t) \tag{50}$$

$$I_N^2 = \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) + \frac{\omega^2}{2} q^2(t) \tag{51}$$

式（50）和（51）是经典 Lagrange 系统的能量积分。

6　结　论

基于分数阶微积分建立起来的非保守系统动力学模型可以更准确地刻划复杂系统的动力学行为。因此，近 20 年来分数阶约束力学系统动力学的研究引起了人们的广泛关注并取得了重要进展。本文主要工作如下：1）建立了 Caputo 导数下分数阶 Lagrange 方程。2）应用时间重参数方法研究了分数阶 Lagrange 系统的 Noether 准对称性，得到了 Frederico－Torres 形式的分数阶守恒量，建立了分数阶 Lagrange 系统的 Noether 准对称性定理。文中给出的方法和结果可望进一步推广应用于分数阶非完整力学系统等。

参考文献：

[1] RIEWE F. Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics[J]. Physical Review E, 1996, 53(2): 1890－1899.

[2] RIEWE F. Mechanics with fractional derivatives[J]. Physical Review E, 1997, 55(3): 3581－3592.

[3] FREDERICO G S F, TORRES D F M. A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations[J]. Mathematical Analysis and Applications, 2007, 334(2): 834－846.

[4] FREDERICO G S F, TORRES D F M. Fractional optimal control in the sense of Caputo and the fractional Noether's theorem[J]. International Mathematical Forum, 2008, 3(10): 479－493.

[5] FREDERICO G S F, TORRES D F M. Fractional Noether's theorem in the Riesz-Caputo sense[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(3): 1023－1033.

[6] FREDERICO G S F, TORRES D F M. Fractional isoperimetric Noether's theorem in the Riemann-Liouville sense[J]. Reports on Mathematical Physics, 2013, 71(3): 291－304.

[7] ZHANG Y, ZHOU Y. Symmetries and conserved quantities for fractional action-like Pfaff variational problems[J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 73(1/2): 783－793.

[8] ZHOU Y, ZHANG Y. Noether's theorems of a fractional Birkhoffian system within Riemann-Liouville derivatives[J]. Chinese Physics B, 2014, 23(12): 281－288.

[9] ZHANG Y, ZHAI X H. Noether symmetries and conserved quantities for fractional Birkhoffian systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 81(1/2): 469－480.

[10] ZHAI X H, ZHANG Y. Noether symmetries and conserved quantities for fractional Birkhoffian systems with time delay[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2016, 36: 81－97.

[11] 张毅，周燕. 基于 Riesz 导数的分数阶 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量[J]. 北京大学学报(自

然科学版），2016，52(4)：658－668.
ZHOU Y，ZHANG Y. Noether symmetry and conserved quantity for fractional Birkhoffian systems in terms of Riesz derivatives[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis，2016，52(4)：658－668.

[12] YAN B，ZHANG Y. Noether's theorem for fractional Birkhoffian systems of variable order[J]. Acta Mechanica，2016，227(9)：2439－2449.

[13] SONG C J，ZHANG Y. Conserved quantities and adiabatic invariants for fractional generalized Birkhoffian systems[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics，2017，90：32－38.

[14] 何胜鑫，朱建青，张毅. 基于分数阶模型的非保守系统的 Noether 准对称性[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2016，55(2)：58－63.
HE S X，ZHU J Q，ZHANG Y. Noether quasi-symmetry for non-conservative systems based on fractional model[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni，2016，55(2)：58－63.

[15] 何胜鑫，朱建青. 基于分数阶模型的相空间中非保守力学系统的 Noether 准对称性[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2015，54(4)：37－42.
HE S X，ZHU J Q. Noether quasi-symmetry for nonconservative mechanical system in phase space based on fractional models[J]. Acta Scientiarum Scientiraum Naturalium Universitatis Sunyatseni，2015，54(4)：37－42.

[16] 丁金凤，金世欣，张毅. 基于 Caputo 导数下的含时滞的 Hamilton 系统的分数阶 Noether 理论[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2016，55(6)：79－85.
DING J F，JING S X，ZHANG Y. Fractional Noether theorems for Hamilton system with time delay based on Caputo derivatives[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni，2016，55(6)：79－85.

[17] 刘艳东，张毅. 研究 Noether 准对称性定理的时间重新参数化方法[J]. 苏州科技大学学报(自然科学版)，2017，34(2)：1－7.
LIU Y D，ZHANG Y. The time-reparameterization method for study of Noether's quasi-symmetry theorems[J]. Journal of Suzhou University of Science and Technology (Natural Science Edition)，2017，34(2)：1－7.

[18] 梅凤翔. 经典约束力学系统对称性与守恒量研究进展[J]. 力学进展，2009，39(1)：37－43.
MEI F X. Advances in the symmetries and conserved quantities of classical constrained systems[J]. Advances in Mechanics，2009，39(1)：37－43.

[19] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京：北京理工大学出版社，2004.
MEI F X. Symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems[M]. Beijing：Beijing Institute of Technology Press，2004.

[20] PONDLUBNY I. Fractional differential equations[M]. San Diego：Academic Press，1999：62－77.

[21] KILBAS A A，SRIVASTAVA H M，TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. Amsterdam：Elsevier B V，2006：69－89.